数理解析研究所講究録
325巻 1978年 34-38

On certain standard subgroups

Kensaku Gomi (Tokyo Univ.)
Izumi Miyamoto (Tsukuba Univ.)
Hiromichi Yamada (Tokyo Univ.)

成分型の群について、「標数2階数2のLie型の群を成分とする群について」（有限群論 数理研講究録277、1976年）に続く近況を報告する。成分型の群に関して、基本的なのは次の問題である。

<u>問題1</u>　$\mathfrak{F}$を単純群のあるfamilyとする。有限群Gのinvolution tの中心化群$C(t)$の2-成分Lで、$L/Z^*(L)$が$\mathfrak{F}$に属するものがあれば、Lの正規包$\langle L^G \rangle$の組成因子はすべて$\mathfrak{F}$に属する。

Aschbacher、Footeの定理により、$B(G)$-conjectureのもとで、上のLはGの標準部分群としてよいので、次の問題が研究さ

れるようになった。

<u>問題2</u>　Lを有限群Gの標準部分群とする。$L/Z(L)$が既知の単純群であるとき、$\langle L^G \rangle$をもとめよ。

この問題についての現状を報告する前に、背景となっている B(G)-conjecture との関連を述べる。B(G)-conjecture は次の有限群論全体における大変重要な予想より導びかれる。

<u>Unbalanced Group Conjecture</u>　有限群Gにおいて、$F^*(G)$が単純で、Gのある involution t について $O(C(t)) \neq 1$ となるならば、$F^*(G)$は、交代群、奇数位数の体上の Chevalley group、PSL(3, 4) 又は He に同型である。

この予想は、Aschbacher、Thompson、R. Solomon をはじめとする多くの人々の努力の結果、M. Harris の分担していた最後の部分が最近次のような仮定のもとで解決された。

<u>仮定</u>　Gを Unbalanced Group Conjecture に対する最小の反例とするとき、$F^*(N)$が単純となるGの真の section N において $\mathcal{F} = \mathcal{F}(p)$, p=奇素数, として問題1は正しいとする。

ここで、$\mathfrak{F}(p)$は既知の単純群のほとんどすべてを、$Chev(p)$（標数 p の有限体上の Chevalley 群）を軸に類別したものである。しかし、その類別は複雑に入り込んでいて、特に$\mathfrak{F}(3)$には $Chev(2)$ のほとんどすべて、$\mathfrak{F}(3)$と$\mathfrak{F}(5)$には交代群が含まれている。従って、既知の単純群のほとんどすべてについて上のような類別にしたがって問題1を解くことが、Unbalanced Group Conjecture の解決のために必要となった。この時、上の帰納的な仮定により、問題2の形で解けば十分となり、こちらの方面からも問題2を取り扱う必要が生じている。

終わりに、問題2について報告する。最初に引用した報告の後、$Chev(2)$ 以外では、3元体上の Chevalley 群と Sporadic 群で合わせて 10個程度の群についてのみ未解決となっている。$Chev(2)$ で残っていた場合については、Seitz が次の結果を得ている。「$O(G)=1$、かつ、$L/Z(L)\cong PS_p(4,2^a)$, $a\geq 2$, $PSU(4,2^a)$, $PSU(5,2^a)$, $PS_p(6,2)$, $PSU(6,2)$, $PSO^{\pm}(8,2)$ の場合、$L\triangleleft G$, $E(G)\cong L\times L$, $E(G)\in Chev(2)$, $L=PSO^{+}(8,2)$ かつ $E(G)\cong M(22)$ のいずれかが成立するならば、Lie rank 3 以上の L について $\langle L^G\rangle/O(\langle L^G\rangle)\cong L/O(L)\times L/O(L)$ 又は HS 又は $M(22)$, 又は $\in Chev(2)$ が成立する。」$PSU(4,2)$ について仮定は明らかにまちがっているが、これは例外的な場合として修正可能なよ

うに思えるので、後は、Lie rank 2 の場合を処理すればよいことになる。以下に、この場合について得られた結果を報告する。

We collect some recently obtained results concerning the following problem.

<u>Problem</u>. Let L be a standard subgroup of a group G. Assume that $|Z(L)|$ is odd and $C_G(L)$ has cyclic Sylow 2-subgroups. Assume further that $LO(G) \ntrianglelefteq G$. Then for given $L/Z(L)$, determine the normal closure $X = \langle L^G \rangle$ of L in G.

<u>Theorem 1</u>. If $L/Z(L) \cong Sp_4(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to one of the following groups:

$$PSU_4(q),\ PSU_5(q),\ PSL_4(q),\ PSL_5(q),\ Sp_4(q^2),$$
$$\text{and } Sp_4(q) \times Sp_4(q).$$

<u>Theorem 2</u>. If $L/Z(L) \cong PSU_4(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to $PSL_4(q^2)$ or $PSU_4(q) \times PSU_4(q)$.

<u>Theorem 3</u>. If $L/Z(L) \cong PSU_5(q)$, $q = 2^n \geq 4$, then $X/Z(X)$ is isomorphic to $PSL_5(q^2)$ or $PSU_5(q) \times PSU_5(q)$.

<u>Theorem 4</u>. If $L \cong PSU_4(2)$, then one of the following holds.

(1) $X/O(X) \cong PSp_4(9)$, $PSU_4(3)$, $PSL_4(3)$, or $PSL_5(3)$.

(2) $X \cong PSL_4(4)$ or $PSU_4(2) \times PSU_4(2)$.

(3) For a central involution z of L, $C_G(z)$ has a quasi-simple subgroup K which satisfies the following conditions:

(a) $z \in K$ and $W = O_2(K)$ is cyclic of order 4.

(b) $K/\langle z \rangle$ is a standard subgroup of $C_G(z)/\langle z \rangle$, W is a Sylow 2-subgroup of $C_G(K/\langle z \rangle)$, and $[K, O(C_G(z))] = 1$.

(c) Either $K/O(K) \cong SU_4(3)$ or $K/Z(K)$ has a Sylow 2-subgroup isomorphic to a Sylow 2-subgroup of $PSL_6(q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$.

Remark. Case (3) occurs in the automorphism group of $PSU_5(3)$ with $K \cong SU_4(3)$.

Theorem 5. Let $L \cong G_2(q)$, $q = 2^n \geq 4$, and assume that every section of G satisfies the $B(G)$-conjecture. Then X is isomorphic to $G_2(q^2)$ or $G_2(q) \times G_2(q)$.

Theorem 6. Let $L \cong {}^3D_4(q^3)$, $q = 2^n \geq 2$, and assume that every section of G satisfies the $B(G)$-conjecture. Then one of the following holds.

(1) $X \cong {}^3D_4(q^6)$ or ${}^3D_4(q^3) \times {}^3D_4(q^3)$.

(2) $q = 2$, $|G:O^2(G)| = 2$, and $O^2(G)$ contains a subgroup H such that $|O^2(G):H|$ is odd and $H \cong {}^3D_4(q^3) \times {}^3D_4(q^3)$